MANUAL DE ESTUDIO · SISTEMAS Y CONTROL EN MECATRÓNICA

# Análisis en espacio de estados y respuesta dinámica

Capítulo 02 · En el video: minuto 11:23 · Duración 09:56

**Objetivo.** Analizar la estructura, la estabilidad y el desempeño de un sistema a partir de su modelo de estados.

## Ideas clave

### Solución y modos

$x(t) = e^{At}x(0) + \int e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$: respuesta libre más forzada. Los autovalores de A son los polos y cada uno, con su autovector, define un modo natural.

### Formas canónicas

Un cambio de variables $x = Pz$ no cambia los autovalores ni la función de transferencia. Las formas controlable, observable y modal facilitan el diseño y la interpretación.

### Controlabilidad y observabilidad

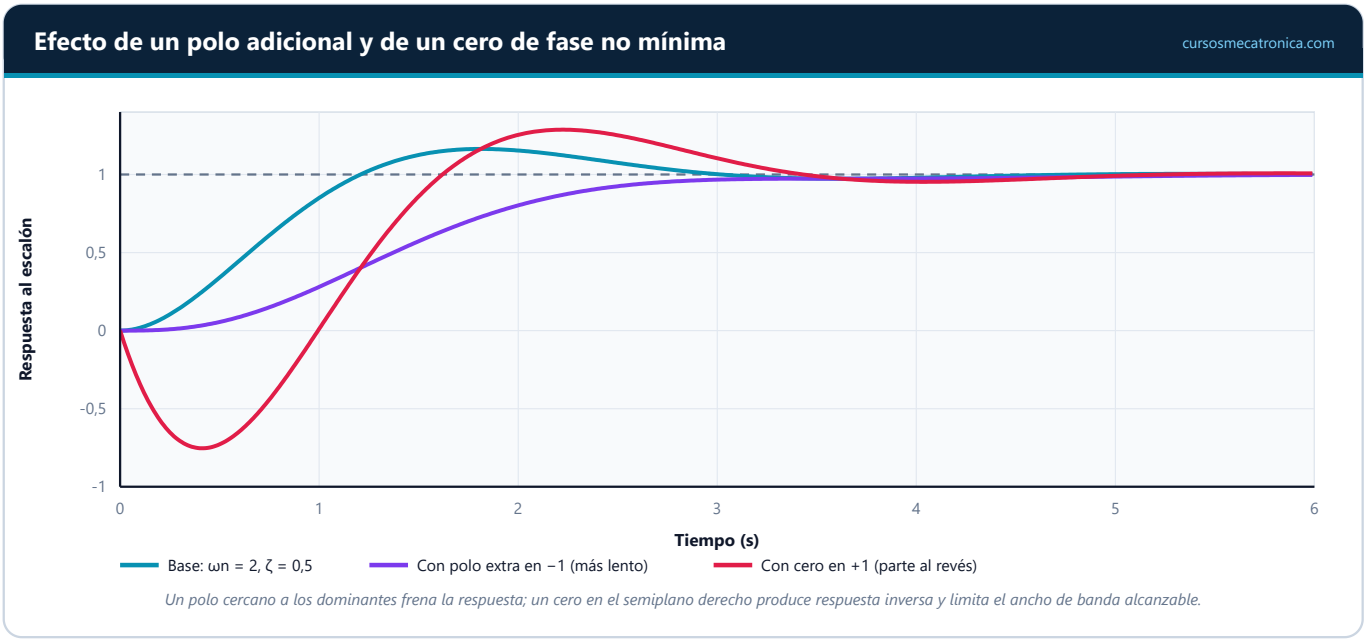
Controlable si la matriz $[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B]$ tiene rango completo: el actuador puede llevar el estado a cualquier valor. Observable si $[C; CA; \dots]$ tiene rango completo: los sensores permiten reconstruir todo el estado. Indican dónde poner actuadores y sensores.

### Estabilidad de Lyapunov

Interna: todos los autovalores con parte real negativa. Equivale a que exista $P > 0$ que resuelve $A^TP + PA = -Q$. La estabilidad BIBO puede ocultar un modo inestable no controlable o no observable.

### Desempeño

Las especificaciones de $M_p$, $t_p$ y $t_s$ definen regiones del plano s. Un polo adicional cercano frena la respuesta; un cero en el semiplano derecho produce respuesta inversa.




*Por qué la aproximación de segundo orden necesita polos dominantes claros.*

### Error estacionario

Depende del tipo del sistema (integradores en el lazo): tipo 0 deja error ante un escalón, tipo 1 lo elimina y deja error ante una rampa. Principio del modelo interno: para seguir o rechazar una señal sin error, el lazo debe contener su modelo.

## Fórmulas y relaciones

| Relación | Expresión | Cómo leerla |
|---|---|---|
| **Solución** | $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ | Libre + forzada. |
| **Controlabilidad** | $\text{rango}[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B] = n$ | Criterio de Kalman. |
| **Observabilidad** | $\text{rango}[C;\ CA;\ \dots;\ CA^{n-1}] = n$ | Dual de la controlabilidad. |
| **Lyapunov** | $A^TP + PA = -Q,\ P > 0$ | Estabilidad interna. |
| **Error ante escalón** | $e_{ss} = 1/(1 + K_p),\ K_p = \lim G(s)\ \text{con}\ s \to 0$ | Tipo 0. |
| **Error ante rampa** | $e_{ss} = 1/K_v,\ K_v = \lim s{\cdot}G(s)$ | Tipo 1. |

**Ejemplo resuelto: masa-resorte-amortiguador con motor lineal**

1. m = 1 kg, b = 2 N·s/m, k = 25 N/m: $A = [[0, 1], [-25, -2]]$, $B = [0; 1]$.
2. Autovalores $-1 \pm 4{,}9j$: $\omega_n$ = 5 rad/s, $\zeta$ = 0,2.
3. $\det[B\ AB] = -1 \neq 0$: controlable. Con un sensor de posición, $\det[C;\ CA] = 1$: observable.
4. Lyapunov con Q = I: $P = [[6{,}54;\ 0{,}02], [0{,}02;\ 0{,}26]]$, definida positiva → estable.
5. Lazo de posición sin integrador: error ante escalón del 96 %; con un integrador, cero.

**analisis_espacio_estados.py realiza estos cálculos y verifica que $A^TP + PA = -I$.**

## Tipo de sistema y error estacionario

| Tipo | Escalón | Rampa | Parábola |
|---|---|---|---|
| 0 | $1/(1 + K_p)$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | 0 | $1/K_v$ | $\infty$ |
| 2 | 0 | 0 | $1/K_a$ |

## Código del capítulo

Los archivos completos vienen en el paquete ZIP del capítulo (carpeta `codigo/`).

**analisis_espacio_estados.py** — autovalores, controlabilidad, observabilidad, ecuación de Lyapunov y error estacionario. *(extracto: primeras 70 de 121 líneas)*

```
"""
analisis_espacio_estados.py
Propiedades de un modelo en espacio de estados (capítulo 02).

Sistema: masa-resorte-amortiguador con motor lineal, x = [posición, velocidad]
    A = [[0, 1], [-k/m, -b/m]],  B = [[0], [1/m]]
  1. Autovalores, wn y zeta.
  2. Controlabilidad: rango de [B, AB]; y qué pasa si la fuerza no actúa sobre la masa.
  3. Observabilidad con un sensor de posición y con uno de velocidad.
  4. Estabilidad de Lyapunov: se resuelve A^T·P + P·A = -I y se verifica P > 0.
  5. Error en estado estacionario y tipo de sistema.

Uso:  python analisis_espacio_estados.py
"""
import cmath
import math

def mat(a, b):
    """Producto de matrices (listas de listas)."""
    return [[sum(a[i][k] * b[k][j] for k in range(len(b))) for j in range(len(b[0]))] for i in range(len(a))]


def suma(a, b, s=1.0):
    return [[x + s * y for x, y in zip(fa, fb)] for fa, fb in zip(a, b)]


def esc(a, k):
    return [[k * x for x in f] for f in a]


def tr(a):
    return [list(f) for f in zip(*a)]


def eye(n):
    return [[1.0 if i == j else 0.0 for j in range(n)] for i in range(n)]


def inv(a):
    n = len(a)
    m = [f[:] + e for f, e in zip(a, eye(n))]
    for c in range(n):
        p = max(range(c, n), key=lambda f: abs(m[f][c]))
        m[c], m[p] = m[p], m[c]
        piv = m[c][c]
        m[c] = [x / piv for x in m[c]]
```

```
        for f in range(n):
            if f != c:
                k = m[f][c]
                m[f] = [x - k * y for x, y in zip(m[f], m[c])]
    return [f[n:] for f in m]


def expm(a, t=1.0):
    """e^(A·t) por escalado y elevación al cuadrado con serie de Taylor."""
    n, s = len(a), 0
    norma = max(sum(abs(x) for x in f) for f in a) * abs(t)
    while norma > 0.5:
        norma, s = norma / 2, s + 1
    at = esc(a, t / 2 ** s)
    r, term = eye(n), eye(n)
    for k in range(1, 20):
        term = esc(mat(term, at), 1.0 / k)
        r = suma(r, term)
    for _ in range(s):
        r = mat(r, r)
    return r


def det2(a):
```

## Errores frecuentes

- Concluir estabilidad interna a partir de la función de transferencia (puede haber cancelaciones).
- Poner un sensor que no permite observar el estado que se quiere controlar.
- Aproximar por segundo orden con polos que no son claramente dominantes.
- Agregar un integrador sin revisar los márgenes de estabilidad.

## Autoevaluación

1. ¿Qué indican los autovalores de A?
2. ¿Qué significa que un sistema no sea observable?
3. ¿Qué error ante un escalón deja un lazo tipo 1?
4. ¿Qué efecto tiene un cero en el semiplano derecho?

**Respuestas. 1.** Los polos del sistema (sus modos naturales). **2.** Que con los sensores disponibles no se puede reconstruir todo el estado. **3.** Cero. **4.** Respuesta inversa al inicio y límite al ancho de banda.