MANUAL DE ESTUDIO · SISTEMAS Y CONTROL EN MECATRÓNICA

Lugar de las raíces y métodos de respuesta en frecuencia

Capítulo 03 · En el video: **minuto 21:19** · Duración 10:18

Objetivo. Diseñar compensadores con el lugar de las raíces y verificar la estabilidad relativa en frecuencia.

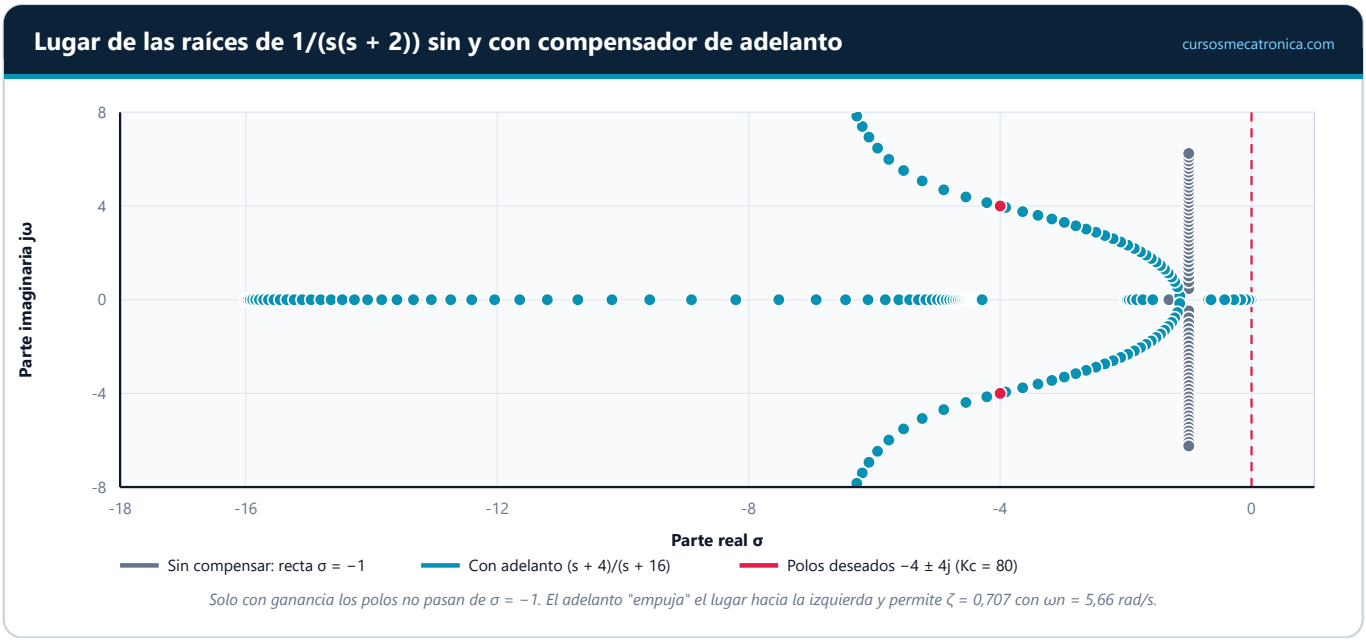
Ideas clave

Lugar de las raíces

Muestra cómo se mueven los polos de lazo cerrado (raíces de $1 + KG(s)H(s) = 0$) al variar K. Un punto pertenece al lugar si cumple la condición de fase (−180°); la de magnitud da el K. Las ramas parten de los polos, terminan en los ceros o en asíntotas, y cruzan el eje imaginario donde lo indica Routh.

Compensadores

El adelanto $(s + z)/(s + p)$ con z < p aporta fase positiva y acerca el lugar a la región deseada (más rápido y amortiguado). El atraso mejora el error estacionario sin mover mucho los polos. El PID combina ambos efectos. En discreto se diseña igual sobre el plano z.



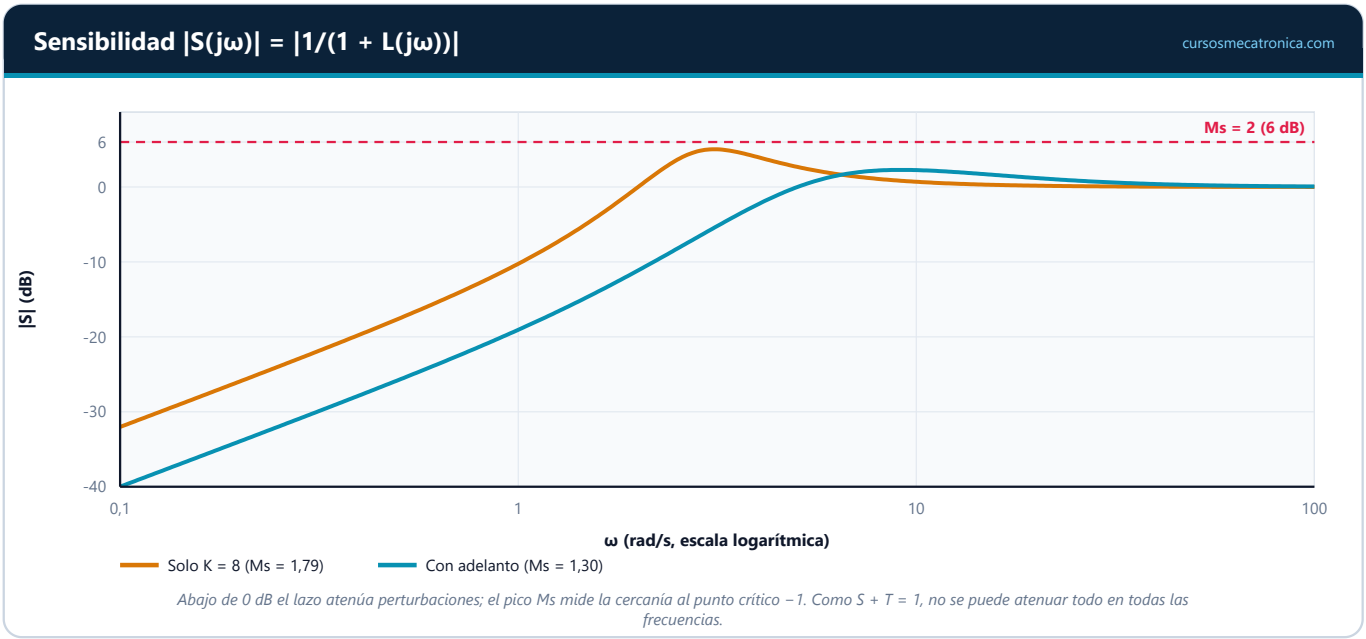
Diseño por lugar de las raíces.

Frecuencia

Bode muestra |G(jω)| y ∠G(jω); Nyquist dibuja L(jω) en el plano complejo y cuenta las vueltas alrededor de −1: $Z = N + P$ polos inestables de lazo cerrado. Sirve también con retardos, que en Bode solo restan fase.

Márgenes y sensibilidad

Margen de ganancia y de fase miden la distancia al punto crítico. La sensibilidad $S = 1/(1 + L)$ indica cuánto se atenúan las perturbaciones y $T = L/(1 + L)$ cuánto ruido de medición pasa; como S + T = 1, el diseño busca S pequeña en baja frecuencia y T pequeña en alta. El pico M_s debe ser menor que 2.



Moldeado del lazo (loop shaping).

Fórmulas y relaciones

Relación	Expresión	Cómo leerla
Condición de fase	$\angle KG(s)H(s) = \pm 180°(2k+1)$	Define el lugar.
Condición de magnitud	$\lvert KG(s)H(s)\rvert = 1$	Da la ganancia en cada punto.
Centroide de asíntotas	$\sigma_a = (\Sigma \text{ polos} - \Sigma \text{ ceros})/(n-m)$	Ángulos ±180°(2k + 1)/(n − m).
Adelanto	$C(s) = K_c(s+z)/(s+p),\ z < p$	Aporta fase positiva.
Nyquist	$Z = N + P$	Z: polos inestables de lazo cerrado.
Sensibilidad	$S = 1/(1+L),\ T = L/(1+L),\ S+T = 1$	M_s = máx|S|.

Ejemplo resuelto: compensador de adelanto para un servo

1. Planta G = 1/(s(s + 2)); se desean polos en $s_d = -4 \pm 4j$ (ζ = 0,707, ω_n = 5,66 rad/s).
2. Fase de G en s_d: 108,4° → faltan $-180° - 108{,}4° = 71{,}6°$ (módulo 360°).
3. Cero en −4 (justo debajo, aporta 90°); el polo debe restar 18,4°: queda en −16.
4. Magnitud: $K_c = 80$. Polos de lazo cerrado: −4 ± 4j y −10.
5. MF pasa de 38,7° (solo ganancia K = 8) a 55°, y M_s de 1,79 a 1,30.

C(s) = 80·(s + 4)/(s + 16). lugar_raices_y_frecuencia.py repite el diseño y calcula márgenes y sensibilidad.

Compensadores clásicos

Compensador	Efecto principal	Cuándo usarlo
Ganancia	Mueve los polos sobre el lugar	Si el lugar ya pasa por la región deseada
Adelanto	Más fase, más rapidez y amortiguamiento	Respuesta lenta u oscilatoria
Atraso	Más ganancia en baja frecuencia	Error estacionario excesivo
Adelanto-atraso / PID	Ambos efectos	Especificaciones de transitorio y de régimen
Filtro notch	Atenúa una frecuencia	Resonancias mecánicas

Código del capítulo

Los archivos completos vienen en el paquete ZIP del capítulo (carpeta `codigo/`).

lugar_raices_y_frecuencia.py — lugar de las raíces, diseño de adelanto por la condición de fase, MF y pico de sensibilidad. *(extracto: primeras 70 de 80 líneas)*

```
"""
lugar_raices_y_frecuencia.py
Lugar de las raíces, compensador de adelanto y sensibilidad (capítulo 03).

Planta: G(s) = 1 / (s·(s + 2))   (servo de posición).
  1. Puntos del lugar de las raíces al variar K y asíntotas.
  2. Diseño de un compensador de adelanto C(s) = Kc·(s + z)/(s + p) para
     llevar los polos dominantes a s = −4 ± 4j (zeta = 0,707, wn = 5,66 rad/s)
     por la condición de fase.
  3. Margen de fase y pico de sensibilidad Ms = max|1/(1 + L(jw))|.

Uso:  python lugar_raices_y_frecuencia.py
"""
import cmath
import math

def evaluar(c, s):
    r = 0
    for a in c:
        r = r * s + a
    return r


def raices(c, iteraciones=500):
    """Raíces de un polinomio (coeficientes de mayor a menor grado), Durand-Kerner."""
    c = [x / c[0] for x in c]
    n = len(c) - 1
    z = [(0.4 + 0.9j) ** k for k in range(n)]
    for _ in range(iteraciones):
        nuevo = []
        for i in range(n):
            den = 1
            for j in range(n):
                if i != j:
                    den *= z[i] - z[j]
            nuevo.append(z[i] - evaluar(c, z[i]) / den)
        z = nuevo
    return sorted(z, key=lambda p: (p.real, p.imag))


def fase_grados(z):
    return math.degrees(cmath.phase(z))
```

```
if __name__ == '__main__':
    print('1) Polos del lazo cerrado s² + 2s + K = 0')
    for K in [0.5, 1, 2, 8, 32]:
        p = raices([1, 2, K])
        z = -p[0].real / abs(p[0]) if abs(p[0].imag) > 1e-9 else 1.0
        print(f'   K = {K:5.1f}: {p[0].real:+.2f}{p[0].imag:+.2f}j, {p[1].real:+.2f}{p[1].imag:+.2f}j   zeta =
{z:.2f}')
    print('   Ruptura en s = −1 (K = 1); para K > 1 los polos suben por la recta σ = −1: solo con ganancia no
se acelera.')

    print('\n2) Compensador de adelanto para s_d = −4 + 4j')
    sd = complex(-4, 4)
    fase_planta = fase_grados(1 / (sd * (sd + 2)))
    falta = -180 - fase_planta
    falta = (falta + 180) % 360 - 180
    print(f'   fase de G(s_d) = {fase_planta:.1f}°, falta aportar {falta:.1f}°')
    z = 4.0                                  # cero bajo el polo deseado
    ang_cero = fase_grados(sd + z)
    ang_polo = ang_cero - falta
    p = -sd.real + sd.imag / math.tan(math.radians(ang_polo))
    Kc = 1 / abs((sd + z) / (sd + p) / (sd * (sd + 2)))
    print(f'   cero en −{z:.0f} (aporta {ang_cero:.1f}°), polo en −{p:.2f}, Kc = {Kc:.2f}')
    num = [Kc, Kc * z]
    den = [1, 2 + p, 2 * p, 0]
    car = [den[0], den[1], den[2] + num[0], den[3] + num[1]]
    polos = raices(car)
    print('   polos de lazo cerrado:', ', '.join(f'{x.real:+.2f}{x.imag:+.2f}j' for x in polos))
```

Errores frecuentes

- Subir la ganancia esperando más rapidez cuando el lugar no lo permite.
- Poner el polo del adelanto demasiado lejos: amplifica el ruido.
- Evaluar márgenes sin considerar el retardo del sistema digital.
- Buscar S pequeña en todas las frecuencias: es imposible.

Autoevaluación

1. ¿Dónde empiezan las ramas del lugar de las raíces?
2. ¿Qué aporta un compensador de adelanto?
3. En Nyquist, ¿qué significa Z = N + P?
4. ¿Qué valor de M_s se recomienda no superar?

Respuestas. 1. En los polos de lazo abierto (K = 0). **2.** Fase positiva: más rapidez y amortiguamiento. **3.** Polos inestables de lazo cerrado = vueltas alrededor de −1 + polos inestables de lazo abierto. **4.** 2 (6 dB).